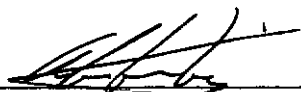


TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM SISTEMAS
BIFÁSICOS DURANTE A FUSÃO TÉRMICA

Fernando Antonio Milito

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRA-
MAS DE PÓS GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL
DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PA-
RA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.)

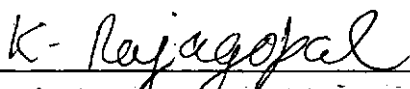
Aprovada por:



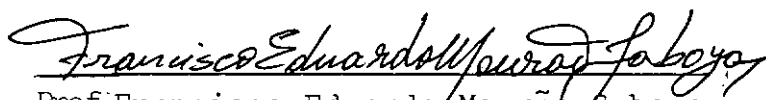
Prof. Cyrus Macedo Hackenberg
(Presidente)



Prof. Miguel Hiroo Hirata



Prof. Krishnaswamy Rajagopal



Prof. Francisco Eduardo Mourão Saboya

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

NOVEMBRO DE 1978

MILITO, FERNANDO ANTONIO

Transferência de Calor em Sistemas Bifásicos
Durante a Fusão Térmica [Rio de Janeiro] 1978.

VII, 53 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc.,
Engenharia Mecânica, 1978)

Tese - Univ. Fed. Rio de Janeiro. Fac. Engenharia

I. Transferência de Calor I. COPPE/UFRJ

II. Título (série).

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Cirus Macedo Hackenberg pela su gestão do tema e pela constante orientação no desenvolvimento desse trabalho.

Ao Programa de Engenharia Mecânica pela valiosa atenção que sempre me foi prestada.

À FINEP e ao CNPq pelo apoio financeiro necessário.

RESUMO

Neste trabalho de problema de contorno livre, é analisado um modelo transiente no sentido de representar os perfis de temperatura nas fases líquida e sólida, durante a fusão térmica.

Os resultados experimentais obtidos em câmara especialmente construída são confrontados com o modelo teórico condutivo, unidirecional, a fim de se estabelecer o comportamento dinâmico da frente de fusão. É também estudada a eficiência do processo térmico e sua maximização como uma função das propriedades físicas, incluindo o calor latente.

ABSTRACT

In this work a transient model of a free boundary value problem is analysed in order to represent the temperature profile in liquid and solid phases during thermal fusion.

The experimental results which were obtained in a special probe are compared with the results of the conductive unidirectional model in order to determine the dynamical behaviour of the fusion front. The efficiency of the thermal process is also analysed with respect to its maximizing conditions as a function of the metal's physical properties, mainly its latent heat.

ÍNDICE

	pág.
CAPÍTULO I	
INTRODUÇÃO	1
I.1 Motivação	1
I.2 Revisão da Literatura	4
I.2.1 Origem do Problema	4
I.2.2 Soluções	5
CAPÍTULO II	7
MODELO TEÓRICO	7
II.1. Solução	10
II.2 Taxa de Transferência de Calor	12
II.3 Eficiência Máxima	14
II.4 Parâmetro Cinemático da Fusão	15
II.5 Raízes da Equação de Eficiência Máxima	17
CAPÍTULO III	20
MATERIAIS E MÉTODOS	20
III.1 Equipamento Experimental	20
III.2 Procedimento	22
CAPÍTULO IV	25
ANÁLISE DOS RESULTADOS	25
IV.1 Frente de Fusão	25
IV.2 Temperatura	34
IV.3 Análise de λ	38
IV.4 Eficiência	40

	pág.
CAPÍTULO V	43
CONCLUSÕES	43
CAPÍTULO VI	45
SUGESTÕES	45
APÊNDICE A	47
NOMENCLATURA	51
BIBLIOGRAFIA	52

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

I.1 Motivação

O problema energético mundial agravado pela crescente demanda e pela escassez acentuada dos recursos energéticos convencionais, conduz as nações a se voltarem para novas fontes de energia, no sentido de enfrentarem a realidade da conjuntura atual. Assim sendo, o parâmetro energia merece ser encarado com a devida atenção, não somente voltada no sentido do conforto, mas principalmente por razões de subexistência, propriamente.

Pelos motivos expostos, a humanidade se defronta com a necessidade, não mais a curto prazo, senão imediata, de solucionar aquilo que desde algum tempo vem se tornando um tormento técnico para equilibrar a atual situação.

Um diagnóstico primário nos revela que os esforços de pesquisa residem, entre outras fontes, no aproveitamento da "energia solar", sendo ao que parece, nosso país bastante favorecido neste aspecto. Pela evidência dos fatos esse impasse energético nos motiva a estudar mais amiúde esse problema, cujo argumento nos levou a discernir entre outros temas favoráveis, o mais atraente à nossa tese.

Embora não seja nosso propósito solucionar sumariamente a questão, nem poderia ser, nosso estudo visa, dentro de nossos modestos recursos, possibilitar uma maior atenção e um despertar para trabalhos subsequentes no crucial tema do "armazenamento térmico".

A idéia fundamental de nosso trabalho diz respeito a viabilidade técnica de armazenadores de calor. Neste ponto, nosso intuito nos impeliu a imaginar um sistema que acumulando energia térmica via solar em determinado período, pudesse liberar em outro período essa energia (para fins domésticos ou industriais) e repetir periodicamente esse processo. Claro está, que se esse calor for armazenado em altas temperaturas, tanto mais eficiente será nosso armazenador. A conclusão acima nos induz "ipso facto" a raciocinar em termos de "calor latente" e daí a pensar em termos de "fusão". Nesta altura fica evidenciado um processo de transferência de calor em material fundido. Consequentemente, nosso pretenso trabalho tem como objetivo a análise dos efeitos da fusão nos processos de condução térmica, pois a aplicação da lei de Fourier¹ na equação da energia deve prevalecer durante o processo. A necessidade fundamental de conduzir o material ao estado de fusão, se impõe não somente pela exigência de se trabalhar em altas temperaturas, como também a possibilidade de armazenar maior quantidade de energia à temperatura constante.

Nossa análise diz respeito à determinação do posicionamento da frente de fusão e dos perfis de temperatura nas duas fases em questão. Procuramos ainda dar ênfase no to-

cante a eficiência do processo em termos de calor latente e do ponto máximo dessa eficiência.

O material utilizado no processo foi o estanho e a geometria aplicada a unidirecional.

Optamos pela geometria unidirecional por ser ela a menos complexa, dentre aquelas que satisfazem nossos propósitos. Quanto ao material utilizado, o estanho se impõe pela sua desprezível variação de volume durante a mudança de estado. Seu baixo ponto de fusão, comparado com os demais metais, justifica ainda mais nossa opção.

Pelas razões acima, no desenvolvimento deste trabalho a massa específica do estanho foi tomada a mesma, em ambas as fases.

Foram feitos quadros comparativos e gráficos correspondentes das posições da frente de fusão e perfis de temperaturas nas duas fases obtidas experimentalmente com aquelas previstas pela teoria.

O modelo matemático suporte é limitado exclusivamente ao fluxo unidirecional para uma região semi-infinita e são negligenciados os efeitos de convecção e radiação.

I.2 Revisão da Literatura

A literatura sobre nosso tema é reduzida e algumas soluções analíticas e numéricas para o fluxo de calor unidirecional são conhecidas.

I.2.1 Origem do Problema

Com o intuito de estabelecer o tempo de fusão de blocos de gelo que se deslocavam em regiões polares, Stefan² abriu perspectivas para uma grande variedade de problemas congêneres, conhecidos hoje na literatura científica como "Problemas de Stefan".

Em linguagem matemática moderna, tais problemas estão enquadrados, entre outros, como "Problemas de Contorno Livre". O aspecto original desses problemas é a existência de uma superfície de separação móvel, entre as duas fases, nas quais as propriedades físicas são distintas, daí uma das dificuldades de obtenção de resultados experimentais satisfatórios.

De um modo geral, os "Problemas de Stefan"² se distinguem não somente pelo aspecto aquecimento-refrigeração como também pela geometria (cilíndrica, esférica, etc.). Acrescente-se ainda que estabelecida uma certa geometria, as condi -

ções de contorno: continuidades de fluxos e temperaturas na frente de fusão, modificam as soluções do problema, não somente nos parâmetros das formas gerais, mas também quanto à forma funcional resultante.

I.2.2 Soluções

Coube a Neumann³ a consolidação das idéias de Stefan, dando ele, Neumann, a primeira solução analítica geral do problema, conhecido como "Solução de Neumann" e apresentada hoje por várias publicações, dentre elas a dos autores Carslaw e Jaeger⁴, publicação essa que nos proporcionou o marco inicial para a concretização de nosso trabalho.

Inúmeros pesquisadores prosseguiram no mesmo tema, atacando-o sob distintos métodos matemáticos e distintas análises numéricas. Entre outros, cabe-nos mencionar o moderno trabalho de Chuang e Szekely⁵ para a solução unidirecional por meio da função de Green, o trabalho de Springer⁶ para o caso da geometria cilíndrica, além da publicação de Cho e Sunderland⁷ que de forma semelhante ao nosso trabalho considerou todas as propriedades físicas como constantes em cada fase, apesar de diferentes nas diferentes fases. Também, os autores acima negligenciaram o efeito da convecção, assumindo um valor constante para a densidade.

Liubov⁸, investigou o deslocamento da frente de fusão quando a temperatura da fonte é uma função do tempo.

Prasad e Agrawal⁹ aplicaram o Princípio Variacional na solução de um dos problemas de Stefan. Goodman¹⁰ foi o pioneiro das soluções de problemas transientes, não lineares pelo método da técnica integral nos problemas de contorno livre. Outras técnicas matemáticas encontram sua plenitude nos estudos de Friedman¹¹, Pogorzelski¹² e Tikhonov-Samarskii¹³, entre outros.

Apesar de se tratar de uma solução geral, a análise de Neumann considera como condição de contorno que o material em questão esteja a 0°C (condição homogênea) no instante $t < 0$, o que não deixa de ser uma situação mais cômoda, conduzindo a uma equação transcendental um pouco mais simples. A fim de adaptá-la às nossas conveniências, foi necessário contornar esse impasse e a solução final, neste caso, modifica a equação transcendental definitiva, com a introdução de mais um parâmetro, como poderá ser constatado no trabalho de Hackenberg e Milito¹⁴.

CAPÍTULO II

MODELO TEÓRICO

Consideremos um bloco cilíndrico, contendo internamente um material sólido, cujo ponto de fusão é T_f . O conjunto ocupa uma região semi-infinita $x \in [0, \infty)$ e está a temperatura T_0 , ver figura II.1.

O bloco é suposto lateralmente isolado e no tempo $t = 0$, uma de suas bases ($x = 0$) é elevada bruscamente à temperatura T_v ($T_v > T_f$). Deste modo, inicia-se um processo de fusão com absorção contínua de calor latente. Após um tempo " t " temos, então, duas regiões, uma líquida $x \in [0, X(t)]$ e outra sólida $x \in [X(t), \infty)$, onde $X(t)$ é a posição da frente de fusão.

No que se segue, os índices 1 representam as grandezas do estado sólido e os índices 2, aquelas do estado líquido.

Se α_1 e α_2 são as difusividades térmicas do material nas fases sólida e líquida, respectivamente, podemos aplicar a equação da difusão em ambos os estados, conforme foi feito por Neumann.

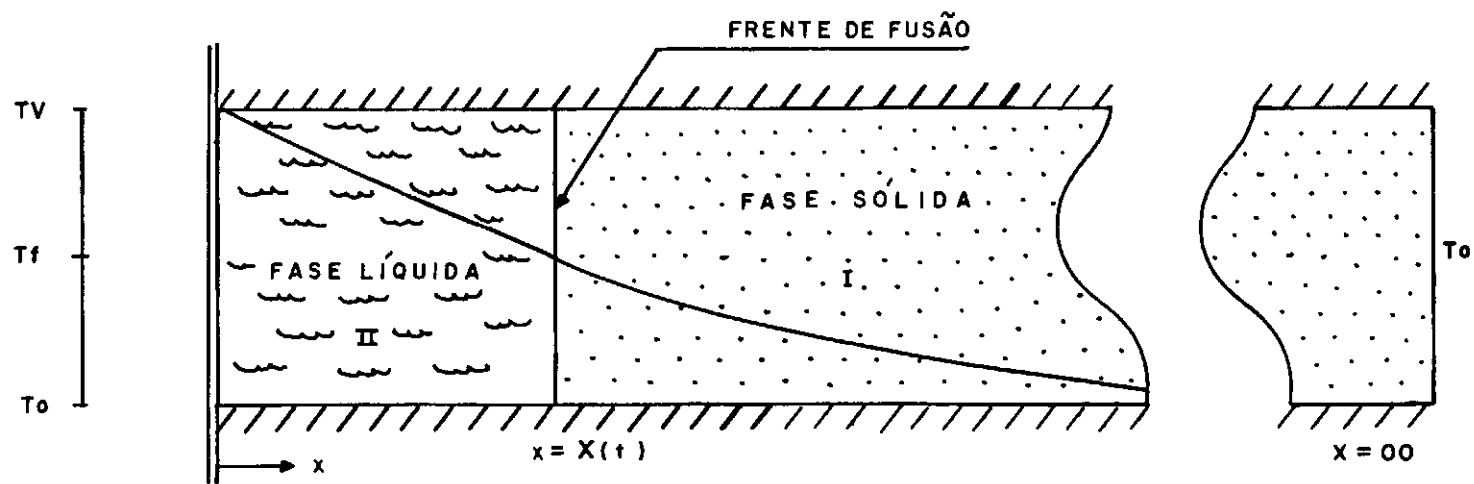


FIGURA II.1 - FUSÃO METÁLICA UNIDIRECIONAL

Podemos então escrever o conjunto de equações e de condições de contorno em cada fase:

a) Fase Sólida

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial T_1}{\partial t} \quad x \in [X(t), \infty) \quad (t > 0) \quad (\text{II-1})$$

$$T_1 \Big|_{x=\infty} = T_o \quad \forall t \quad (\text{II-2})$$

$$T_1 \Big|_{x=X(t)} = T_f \quad t > 0 \quad (\text{II-3})$$

$$T_1 \Big|_{t=0} = T_o \quad [0 < x < \infty) \quad (\text{II-4})$$

b) Fase Líquida

$$\frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial T_2}{\partial t} \quad x \in [0 < x < X(t)], \quad t > 0 \quad (\text{II-5})$$

$$T_2 \Big|_{x=0} = T_v \quad t > 0 \quad (\text{II-6})$$

$$T_2 \Big|_{x=X(t)} = T_f \quad t > 0 \quad (\text{II-7})$$

As condições de contorno (II-3) e (II-7) são relativas à continuidade do perfil de temperatura na interface

líquido-sólido. O problema assim proposto deve determinar $T(x,t)$ em ambas as fases e o posicionamento da frente de fusão $X(t)$.

Num intervalo de tempo dt a superfície de separação das duas fases se desloca de um acréscimo dX , com respectiva absorção de calor latente, o que nos permite escrever

$$q_2 \Big|_{x=X(t)} - q_1 \Big|_{x=X(t)} = L \rho \frac{dX}{dt} \quad (\text{II-8})$$

onde L é o calor latente de fusão do material e ρ sua massa específica.

II.1 Solução

O conjunto de equações e de condições de contorno acima, tem como soluções (ver Apêndice I)

$$T_1(x,t) = T_o + \frac{T_f - T_o}{\text{erfc} \left[\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \lambda \right]} \text{erfc} \frac{x}{2\sqrt{\alpha_1 t}} \quad (\text{II-9})$$

$$T_2(x,t) = T_v - \frac{T_v - T_f}{\text{erf} \lambda} \text{erf} \frac{x}{2\sqrt{\alpha_2 t}} \quad (\text{II-10})$$

$$X(t) = 2 \lambda \sqrt{\alpha_2 t} \quad (\text{II-11})$$

onde o parâmetro λ pode ser calculado pela equação transcendente:

$$\frac{e^{-\lambda^2}}{\operatorname{erfc} \lambda} - \frac{T_f - T_o}{T_v - T_f} \frac{k_1}{k_2} \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} = \frac{e^{-\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \lambda^2}}{\operatorname{erfc} \left[\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \lambda \right]} = \frac{L \sqrt{\pi} \lambda}{C_2 (T_v - T_f)} \quad (\text{II-12})$$

O parâmetro λ , definido pela equação (II-11) é função das condições térmicas impostas e das propriedades físicas do material usado. Logo, a determinação prévia da posição da frente de fusão, ao longo do tempo em um determinado processo deve ser tratada independentemente em cada caso. Para o mesmo material, λ terá valores diferentes de acordo com as temperaturas utilizadas. A equação de determinação de λ (II-12), fornece um único valor para esse parâmetro, para cada material e condições previamente estabelecidas. Determinam-se então os perfis de temperatura pelas equações (II-9) e (II-10) e finalmente a equação (II-11) dá o posicionamento da frente de fusão para um certo tempo, ou o tempo de residência para fundir determinada massa.

II.2. Taxa de Transferência de Calor

Por meio da equação do fluxo de calor da fase líquida, determina-se a quantidade total de calor, Q_T , utilizado no processo.

$$Q_T = \int_0^t Q_o \, dt \quad \text{onde } Q_o = q \Big|_{x=0} S \quad \text{representa a}$$

taxa de transferência de calor através da superfície e t um tempo característico.

Da equação (II-10), após derivação e integração de 0 a t , obtemos que

$$Q_T = 2 k_2 S \frac{T_v - T_f}{\text{erf } \lambda} \sqrt{\frac{t}{\pi \alpha_2}} \quad (\text{II-13})$$

Desta equação podemos observar que o calor total será uma função monotônica crescente com relação ao tempo e linear da diferença de temperaturas da fonte e de fusão. Podemos então definir, neste caso, a eficiência do processo pela relação $\eta = \frac{Q_f}{Q_T}$, onde Q_f é a quantidade de calor absorvida na fusão, ou seja $Q_f = L \rho S X$.

Consequentemente, resulta que

$$\eta = \frac{L \rho \alpha_2 \sqrt{\pi} \lambda \text{ erf } \lambda}{k_2 (T_v - T_f)} \quad (\text{II-14})$$

mostrando que a eficiência do processo independe do tempo.

Definindo o parâmetro $a = \frac{L \sqrt{\pi} \rho \alpha_2}{k_2}$ (dimensional), podemos escrever $\eta = \frac{a \lambda \operatorname{erf} \lambda}{T_v - T_f}$ (II-15)

Neste ponto, convém observar que a equação para a eficiência máxima é uma função das condições térmicas, pois depende explicitamente de $T_v - T_f$. Esta equação no entanto pode ser melhorada, para efeitos de aplicação ao cálculo das condições de armazenamento térmico, se considerarmos a eliminação deste termo utilizando a equação (II-12).

Assim sendo, temos

$$\eta = \frac{1}{e^{\lambda^2} + \beta \frac{e^{-b^2 \lambda^2}}{\lambda e^{-\lambda^2} \operatorname{erfc}(b\lambda)}} \quad (\text{II-16})$$

onde $b = \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}$,

$$\beta = \frac{d}{a} e$$

$$d = (T_f - T_o) \frac{k_1}{k_2} \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}$$

Logo, poderemos otimizar a eficiência do processo determinando "a priori" as melhores condições térmicas para um determinado material. A especificação da temperatura

inicial, T_0 e o conhecimento das propriedades físicas do material, serão suficientes para permitir esta otimização.

A variação da eficiência com a temperatura inicial, T_0 , para um determinado material, pode ser analisada a partir da equação (II-16). Deste modo, pode-se observar que um acréscimo em T_0 acarreta por sua vez um acréscimo na eficiência η .

II.3 Eficiência Máxima

Tomando a derivada de $\eta(\lambda)$ com respeito a λ temos, após igualá-la a zero

$$2\lambda + 2\beta \frac{e^{-b^2\lambda^2}}{\operatorname{erfc}(b\lambda)} + \beta e^{-b^2\lambda^2} \left[\frac{\operatorname{erfc}(b\lambda)(-2b^2\lambda^2 - 1) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} b\lambda e^{-b^2\lambda^2}}{(\lambda \operatorname{erfc}(b\lambda))^2} \right] = 0$$

(II-17)

A equação transcendental (II-17) deve ser resolvida para cada caso, pois "b" e "β" dependem das propriedades físicas do material utilizado, observando ainda que β também depende da temperatura inicial, T_0 .

É evidente que o valor de λ que satisfaz a equação (II-17), também satisfaz a equação (II-12), visto que essa foi utilizada para definir $\eta(\lambda)$ da equação (II-16).

II.4 Parâmetro Cinemático da Fusão

O parâmetro cinemático da fusão, λ , da equação (II-11), deve ser determinado pela equação transcendental (II-12). Para efeito da análise a seguir, reescreveremos esta última equação na forma:

$$\frac{e^{-\lambda^2}}{\operatorname{erf} \lambda} - p \frac{e^{-b^2 \lambda^2}}{\operatorname{erfc}(b\lambda)} = q \lambda, \quad \text{com } \lambda > 0,$$

e com p , q e b constantes positivas.

Facilmente podemos mostrar que esta equação tem uma única raiz.

$$\text{Seja } f(\lambda) = \frac{e^{-\lambda^2}}{\operatorname{erf} \lambda} - p \frac{e^{-b^2 \lambda^2}}{\operatorname{erfc}(b\lambda)} - q\lambda$$

$$\text{Então, } \lim_{\lambda \rightarrow 0} f(\lambda) = \infty$$

A indeterminação encontrada no limite quando $\lambda \rightarrow \infty$, pode ser levantada e podemos concluir que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} f(\lambda) = -\infty$$

Logo, concluímos que no intervalo $0 \leq \lambda \leq \infty$, $f(\lambda)$ passa, pelo menos uma vez através da ordenada zero.

Agora, tomando a derivada de $f(\lambda)$ com respeito a λ :

$$\frac{df(\lambda)}{d\lambda} = \frac{-2\lambda e^{-\lambda^2} \operatorname{erf} \lambda - \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\lambda^2} e^{-\lambda^2}}{(\operatorname{erf} \lambda)^2} - q-p \left[\frac{-2b^2 \lambda e^{-b^2 \lambda^2} \operatorname{erfc}(b\lambda) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} b e^{-b^2 \lambda^2} e^{-b^2 \lambda^2}}{(\operatorname{erfc}(b\lambda))^2} \right]$$

Consequentemente, a função $f(\lambda)$ será decrescente em $\lambda \in (0, \infty)$, se

$$\frac{df(\lambda)}{d\lambda} < 0, \quad \text{isto é,}$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} b e^{-b^2 \lambda^2} e^{-b^2 \lambda^2} \geq 2 b^2 \lambda e^{-b^2 \lambda^2} \operatorname{erfc}(b\lambda), \quad \text{ou ainda}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-b^2 \lambda^2} \geq b \lambda \operatorname{erfc}(b\lambda)$$

Considerando que para o estanho e em geral para os metais, $b < 1$ e admitindo-se para λ um valor exagerado, $\lambda = 1,5$, o que já seria um absurdo, pois equivaleria no caso do estanho $T_v = 12.286^\circ \text{C}$, vem que $b\lambda < 1,5$. Fazendo $b\lambda = \mu$ na desigualdade acima, temos $\mu < 1,5$ e resta-nos mostrar que

a função $f(\lambda)$ será decrescente se $0,564 \geq \mu e^{\mu^2} \operatorname{erfc} \mu$.

A desigualdade acima, pode ser verificada diretamente, ou através de uma análise da função

$$f(\mu) = \mu e^{\mu^2} \operatorname{erfc} \mu$$

Essa função, monotônica crescente, apresenta uma variação de 0 a 0,48 quando $0 < \mu < 1,5$. Este fato foi verificado por Carslaw-Jaeger⁴ (fig. 38, pag 287).

Concluimos então que $f(\lambda)$ é decrescente e que tem apenas uma única raiz.

II.5 Raízes da Equação de Eficiência Máxima

A variação de η contra λ para o caso específico do estanho com temperatura inicial $T_0 = 20^\circ\text{C}$, partindo da equação (II-16), evidencia um máximo de 27% para η , máximo esse que ocorre para o valor de $\lambda = 0,47$. O gráfico da figura II.2 visualiza a dependência acima. Claro está que o valor $\lambda=0,47$ verifica a condição de máximo dado pela equação (II-17), como também a equação de determinação de λ , ou seja, equação (II-12).

A fim de se estabelecer a temperatura da fon

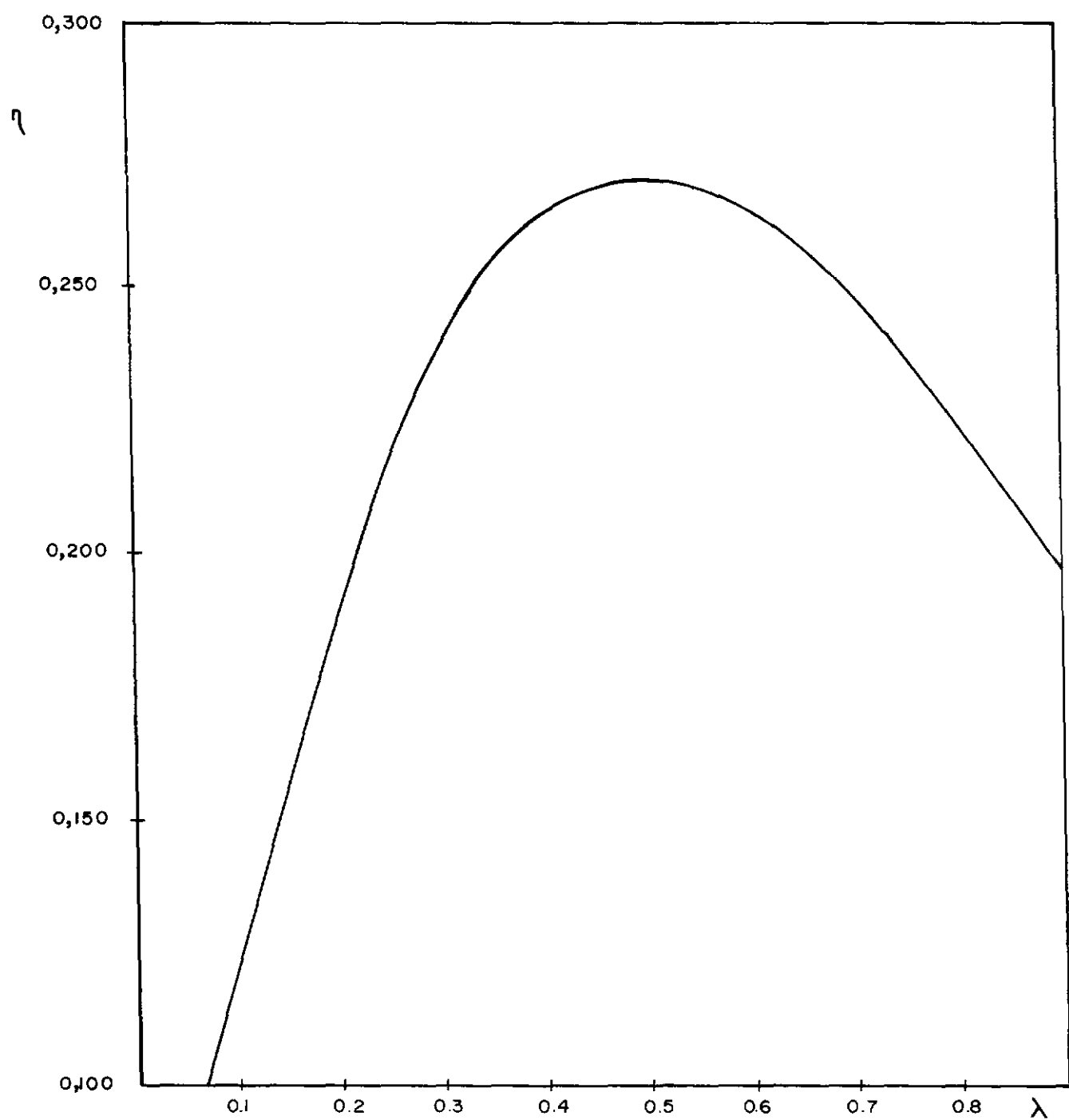


Figura II - 2 - Eficiência do armazenamento térmico para o estanho.

te para a qual a eficiência alcança seu ponto máximo, utilizamos a equação (II-15) e temos:

$$T_v - T_f = 425^{\circ}\text{C} \Rightarrow T_v = 657^{\circ}\text{C}$$



Para se ter uma idéia quantitativa da variação da eficiência com a temperatura inicial T_o , convém frisar que para $T_o = 30^{\circ}\text{C}$, obtemos uma eficiência máxima de 28%, isto é, uma melhora de 1% em relação a condição anterior de $T_o = 20^{\circ}\text{C}$. Esse 1% de melhora que pode ser ganho naturalmente, influencia sobremaneira na temperatura da fonte, pois para $\eta = 0,28$ estabelecendo para $\lambda = 0,46$, estabelece-se $T_v = 627^{\circ}\text{C}$, ou seja, uma redução de 30°C na temperatura da fonte, contra os 657°C necessários para o caso onde $T_o = 20^{\circ}\text{C}$.

Os valores numéricos dos parâmetros físicos utilizados foram retirados de Lyman¹⁵.


CAPÍTULO III

MATERIAIS E MÉTODOS

III.1 Equipamento Experimental

O sistema idealizado consta de um tubo  de quartzo contendo estanho, no qual foram feitos 6 orifícios equidistantes para a colocação dos termopares. A distância entre os orifícios foi de 1,5 cm e os termopares usados foram de ferro-constantan. Os referidos termopares foram conectados a um registrador ARUCOMP com 6 entradas de leituras, tensão 220 volts. As leituras foram aquelas dos pontos situados no eixo do tubo, devidamente registradas em papel milimetrado  inerente ao próprio registrador.

Como fonte de calor usamos um tarugo de cobre de forma cilíndrica com as dimensões indicadas no esquema (Figura III.1). No interior desse tarugo uma resistência elétrica de 500 A e 220 V foi embutida a fim de elevar a temperatura do sistema ao ponto desejado. Essa resistência foi alimentada por corrente elétrica, cuja voltagem foi controlada por um Variavolt tipo VM-230, tensão 220.

O tubo de quartzo foi isolado  termicamente com lã de pedra e o tarugo com lã de vidro. O comprimento do

tubo de quartzo foi de 1 metro, o suficiente para assegurar sua extremidade final à temperatura ambiente, durante toda experiência.

A leitura da fonte foi estabelecida por um segundo registrador de mesma origem que o primeiro, porém de cromel-alumel.

Saliente-se que os registradores utilizados foram testados previamente, acusando erros desprezíveis em relação a um termômetro da ASTM.

A figura III.2 representa o fluxograma do equipamento experimental.

III.2 Procedimento

Regulando-se convenientemente o Varivolt, estabelece-se a temperatura desejável de operação, temperatura esta superior a temperatura real de trabalho, para compensar, no início, a queda de temperatura verificada devido a condução do calor através do estanho.

Acionando a alavanca de comando do sistema, estabelece-se o contacto da fonte com o estanho contido no tubo de quartzo, verificando-se a fusão do metal quase que instantaneamente.

FLUXOGRAMA DO EXPERIMENTAL

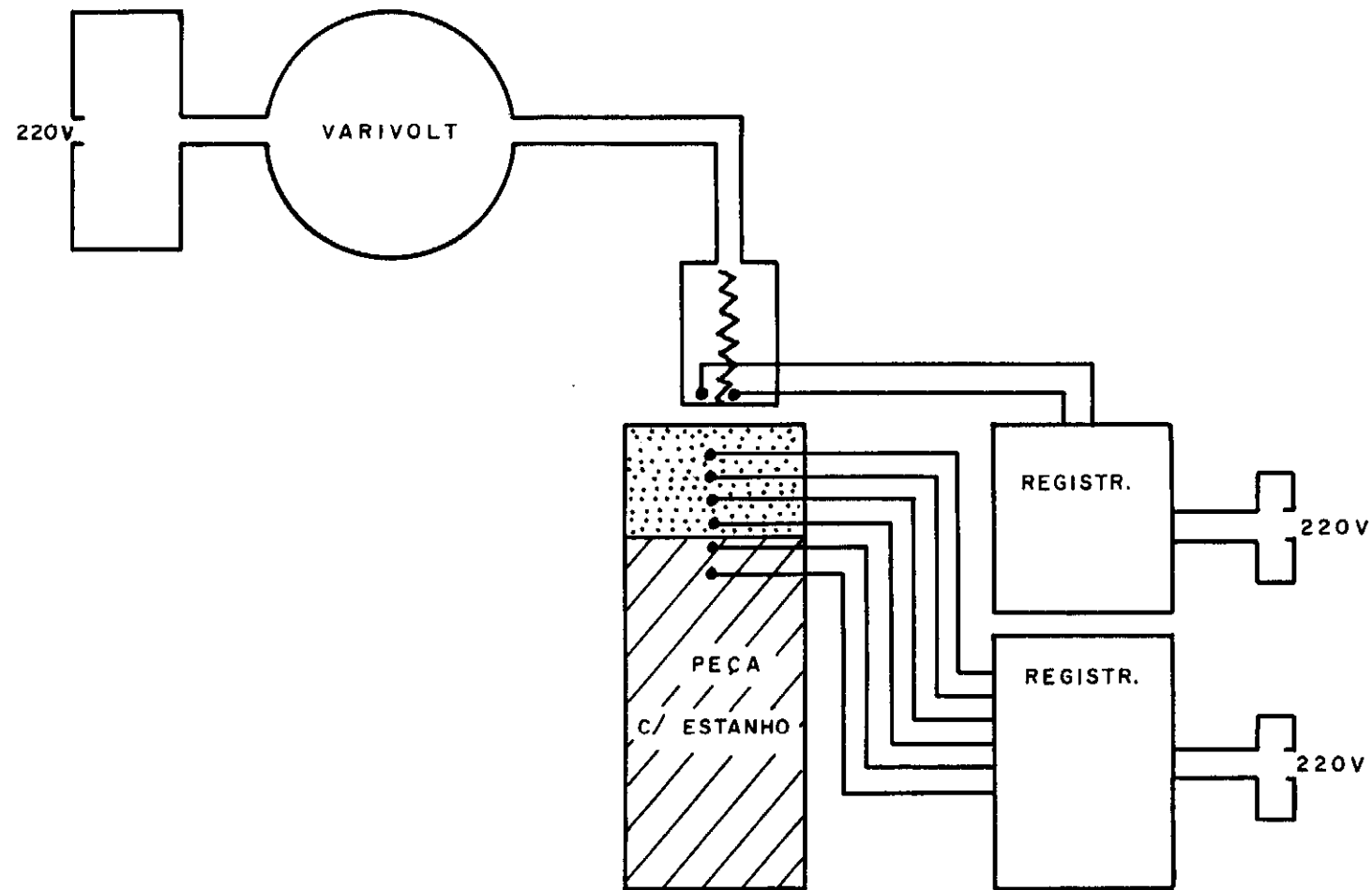


FIGURA III.2

neamente, o que acarreta um decréscimo da temperatura da fonte (abaixo da temperatura real de trabalho). Rapidamente, a fonte vai assumindo sua real temperatura, auxiliada também por um controle adequado do Varivolt. Daí em diante, o processo segue sua linha normal de trabalho, com a fonte a temperatura constante.

Com os registros das temperaturas fornecidas pelo registrador, construimos as tabelas e gráficos que nos permitem uma avaliação quantitativa dos nossos objetivos, ou sejam: os perfis de temperatura, o comportamento da frente de fusão e a determinação da eficiência do processo.

CAPÍTULO IV

ANÁLISE DOS RESULTADOS

Os resultados experimentais foram comparados diretamente com os resultados teóricos e uma análise em posicionamento da frente de fusão, temperatura, eficiência do processo e valores do parâmetro cinemático λ , nos trouxe as seguintes contribuições:

IV.1 Frente de Fusão

Dispondo das leituras experimentais de temperaturas fornecidas pelo registrador, construímos os gráficos (Figs. IV.1 e IV.2) dos perfis de temperatura experimentais, contra posição, para lapsos de tempo de 1 minuto.

Os gráficos supracitados resultam de uma das experiências, no caso, aquela com fonte mantida a 335°C .

A determinação experimental do posicionamento da frente de fusão nos diversos instantes, fica estabelecida pela interseção da isotérma de 232°C (ponto de fusão do estanho), com as curvas de temperatura previamente traçadas.

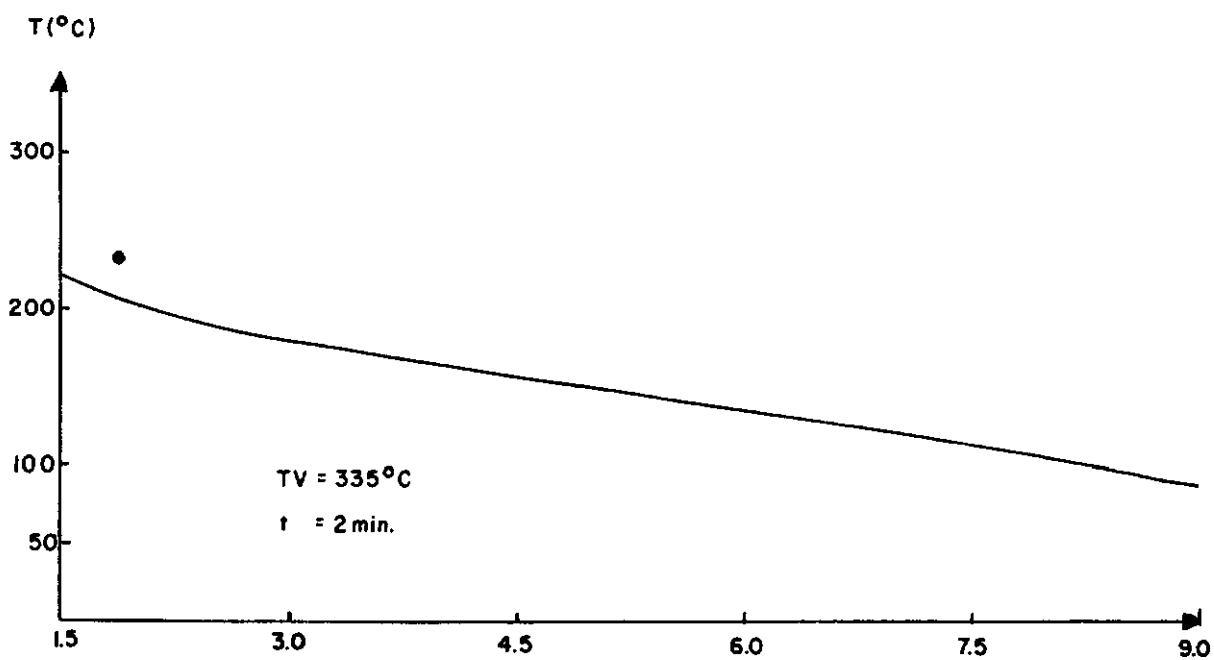


FIGURA IV.1 - PERFIS EXPERIMENTAIS DE TEMPERATURA.

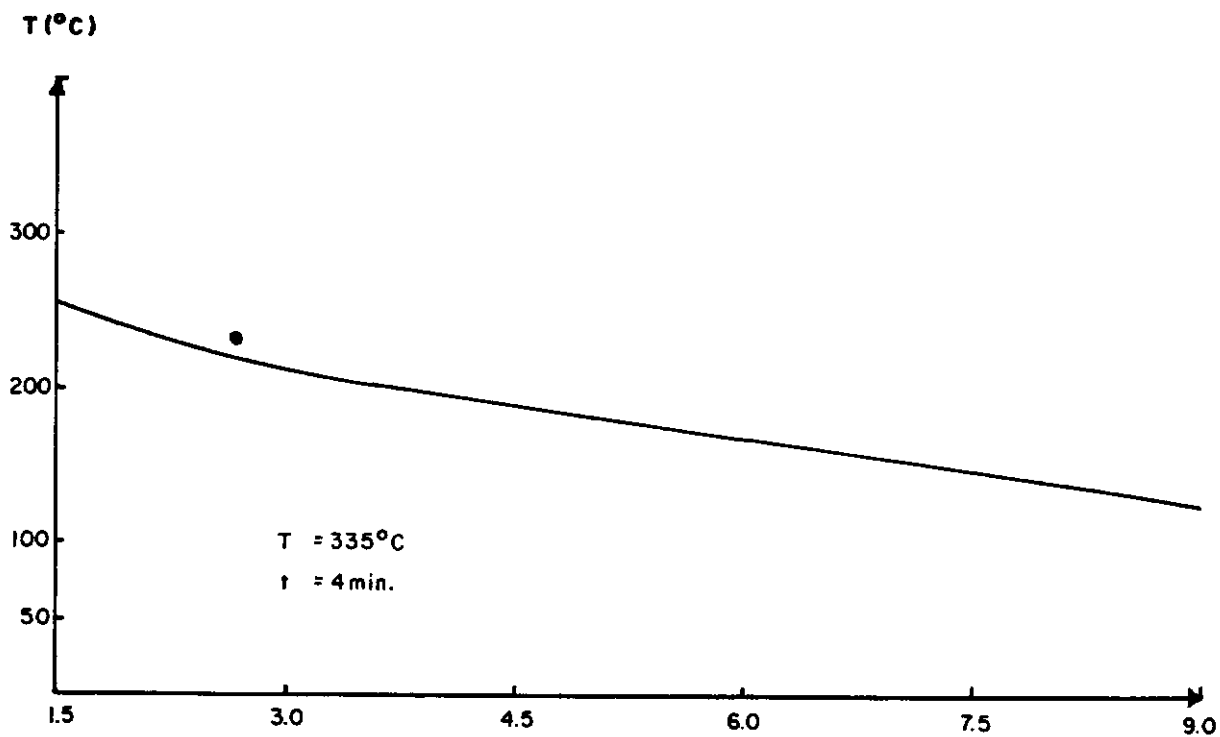


FIGURA IV.1 - PERFIS EXPERIMENTAIS DE TEMPERATURA.

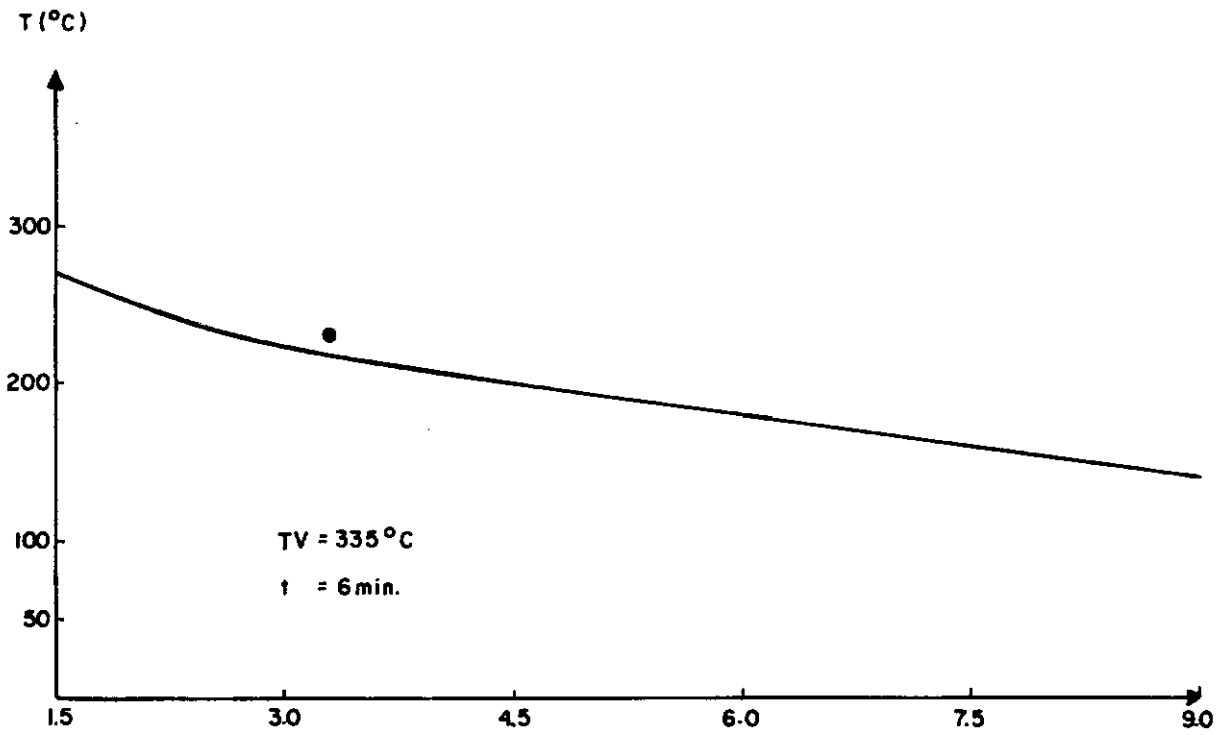


FIGURA IV.2 - PERFIS EXPERIMENTAIS DE TEMPERATURA.

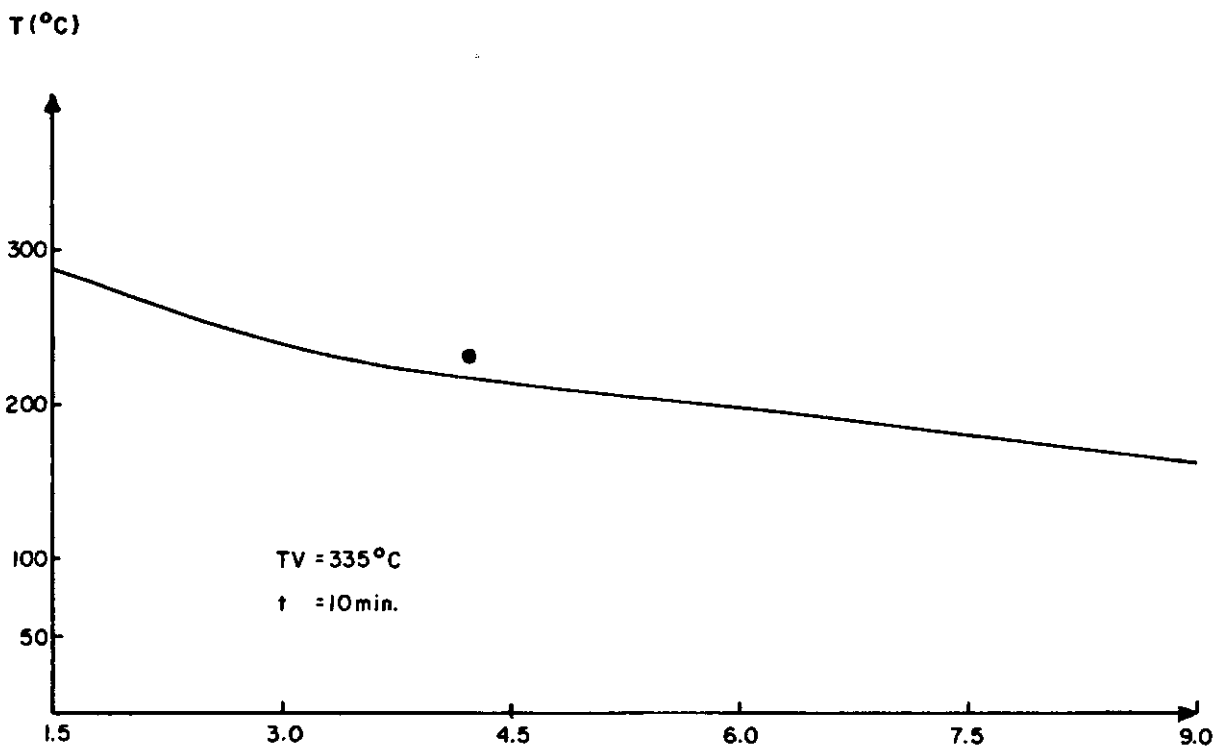


FIGURA IV.2 - PERFIS EXPERIMENTAIS DE TEMPERATURA

Nos mesmos gráficos estão assinaladas as respectivas posições teóricas de frente de fusão, defasadas daquelas experimentais, acusando o erro destas, em relação as teóricas.

Como nosso objetivo visa a aplicação das equações obtidas (II.9), (II.10) e (II.11), utilizamos os posicionamentos acima para estabelecer os valores experimentais de λ (λ_e) por meio da equação teórica correspondente (equação II-11).

Uma média aritmética de 10 (dez) valores de λ_e nos conduz a um λ médio ($\bar{\lambda}$), para cada experiência. De posse desse $\bar{\lambda}$ voltamos outra vez a equação de posição (equação II-11) a fim de determinar as posições de frente de fusão para este $\bar{\lambda}$ (\bar{X}).

A tabela I em anexo, ilustra um tipo de cálculo desse tipo com seus respectivos erros, no caso para a experiência com fonte mantida a 320 °C.

A partir de tabelas semelhantes foram construídos os gráficos de posição contra tempo (Figuras IV.3 a IV.6).

Analizando estes gráficos de posição, podemos fazer uma abordagem quantitativa do comportamento da equação de Neumann³ para o posicionamento da frente de fusão. Esta análise nos permite concluir que o modelo em pauta responde sa-

TABELA I

CÁLCULO DE λ MÉDIOEXPERIÊNCIA COM $T_v = 320^\circ\text{C}$

t (min)	X (cm)	X_e	$X - X_e$	ERRO %	λ_e	\bar{X}	$X - \bar{X}$	ERRO %
1	1,193	1,100	0,093	7,8	0,157	1,031	0,162	13,5
2	1,688	1,400	0,288	17,1	0,141	1,458	0,230	13,5
3	2,067	1,750	0,317	15,3	0,144	1,786	0,281	13,5
4	2,387	2,100	0,287	12,0	0,150	2,062	0,325	13,5
5	2,669	2,500	0,169	6,3	0,160	2,306	0,363	13,5
6	2,923	2,600	0,323	11,0	0,151	2,526	0,397	13,5
7	3,157	2,700	0,457	14,5	0,146	2,728	0,429	13,5
8	3,375	2,800	0,575	17,0	0,141	2,916	0,459	13,5
9	3,580	2,580	0,730	20,4	0,136	3,093	0,487	13,5
10	3,774	3,100	0,674	17,8	0,140	3,261	0,513	13,5
15	4,622	3,500	1,122	24,3	0,129	3,993	0,629	13,5

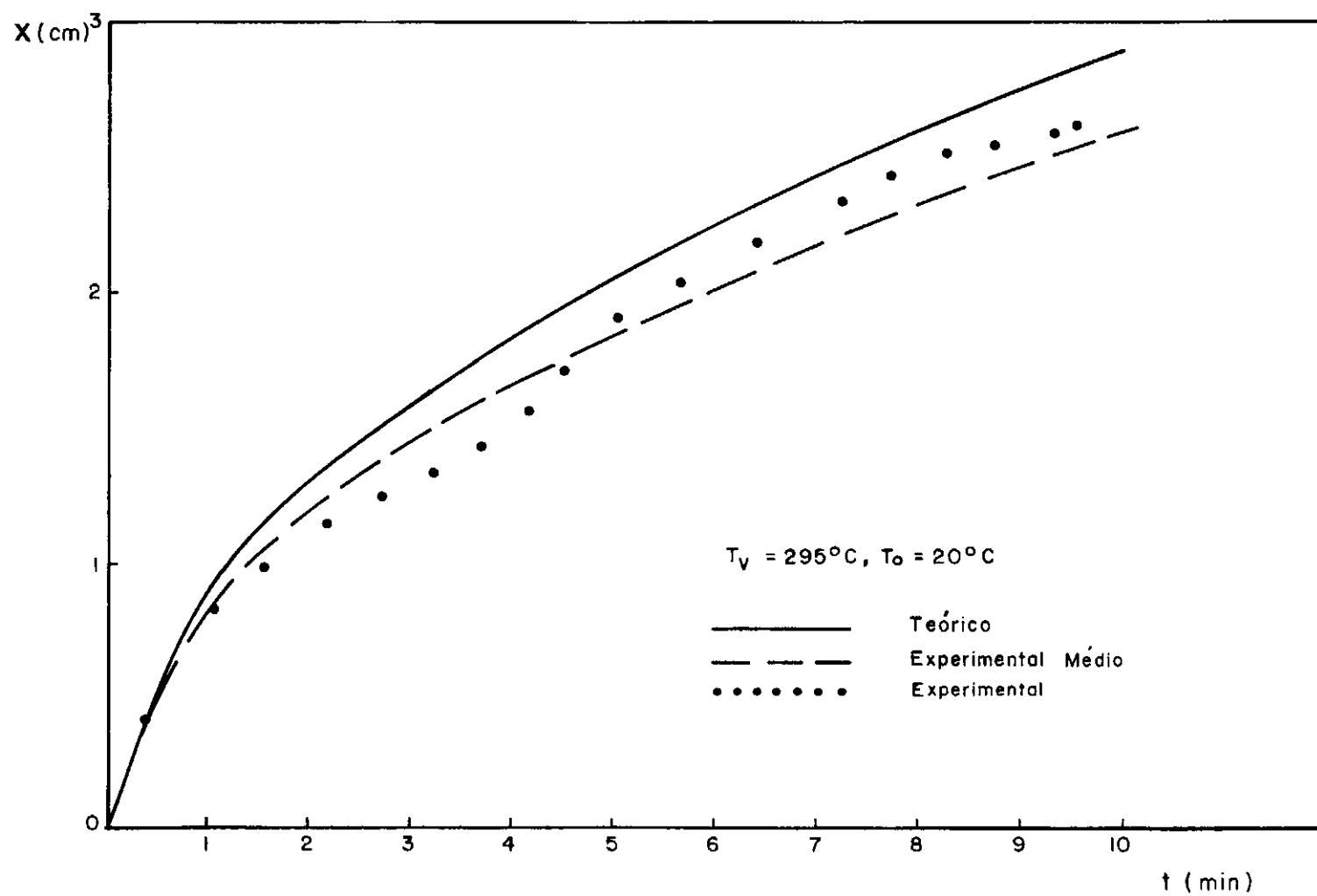


Figura IV - 3 - Confronto teórico - experimental da posição da frente de fusão

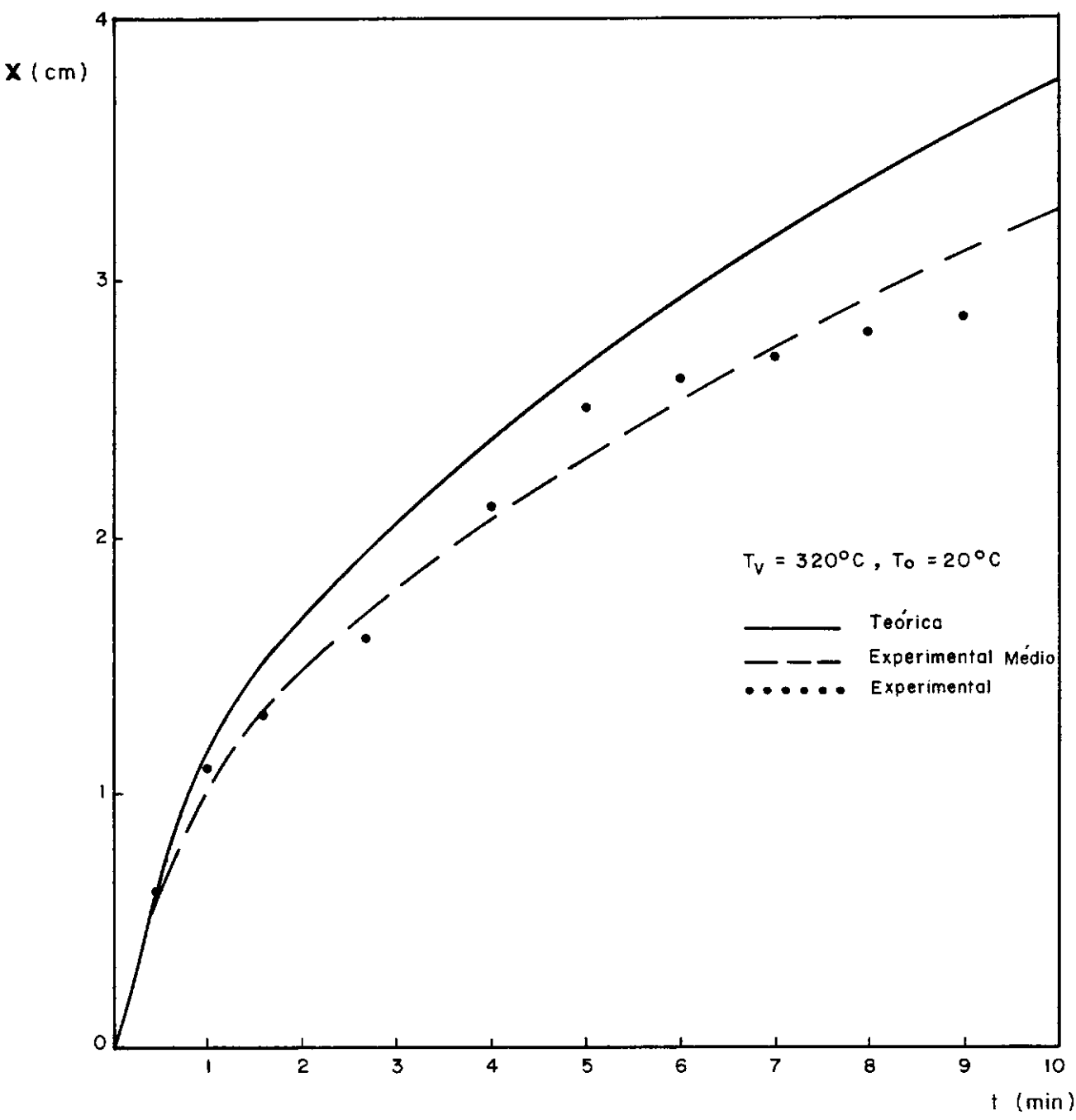


Figura IV - 4 - Confronto teórico experimental da posição da frente de fusão

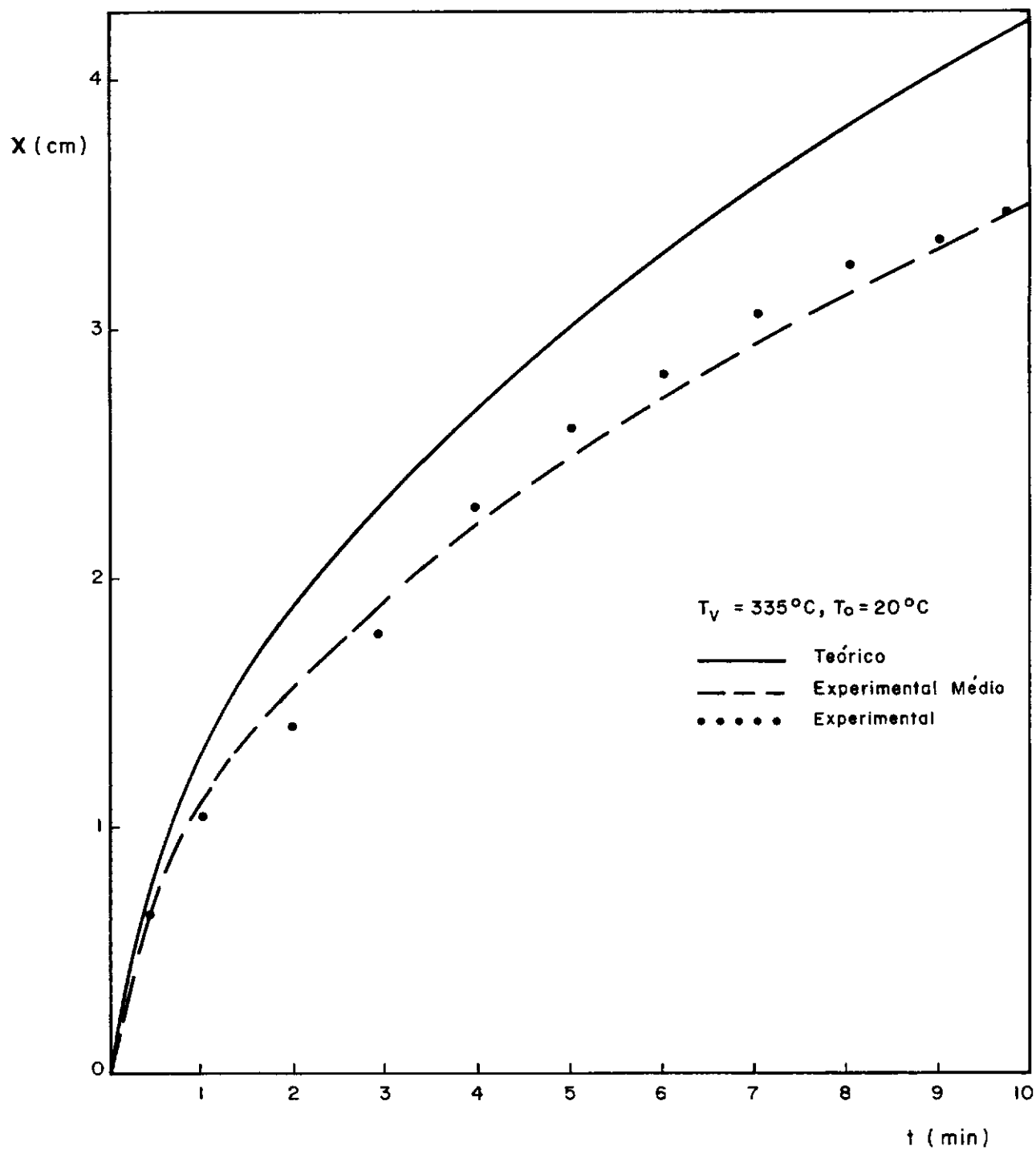


Figura IV - 5 - Confronto teórico - experimental da posição da frente de fusão

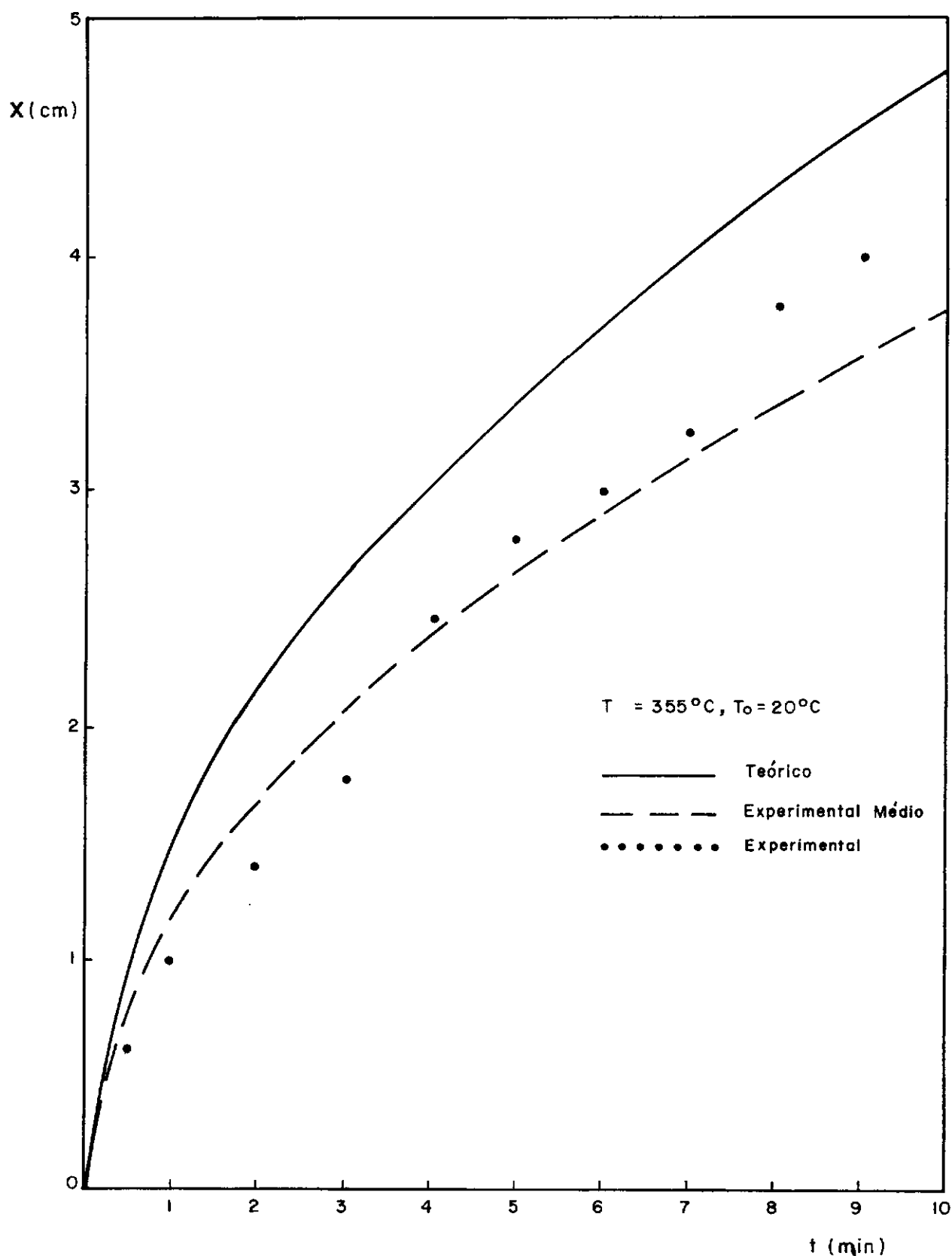


Figura IV - 6 - Confronto teórico - experimental da posição da frente de fusão

tisfatoriamente dentro dos limites em que trabalhamos, acusando erros de posição entre 10,5% e 21,5%.

Depreende-se ainda dessa análise, que nos instantes iniciais a resposta do experimental se afasta sensivelmente daquela esperada devido ao fato da fonte ainda não ter atingido sua temperatura real de operação.

IV.2 Temperatura

Os registros experimentais de temperatura estão representados nas figuras IV.7 e IV.8 para experiência com fonte à temperatura de 295 °C.

Nestes gráficos da temperatura função de posição e tempo, foram considerados os erros percentuais do experimental frente ao teórico. Depreende-se daí que o erro percentual médio, para todos os instantes, no ponto mais afastado da fonte (maior erro), está na ordem de 15%.

Analisando a figura IV.8.1 verificamos que os erros percentuais médios de temperatura, são crescentes na medida que os pontos se afastam da fonte de calor. Naturalmente, os pontos mais próximos da fonte acusam menores erros. O fato se justifica na razão de que os pontos mais afastados es-

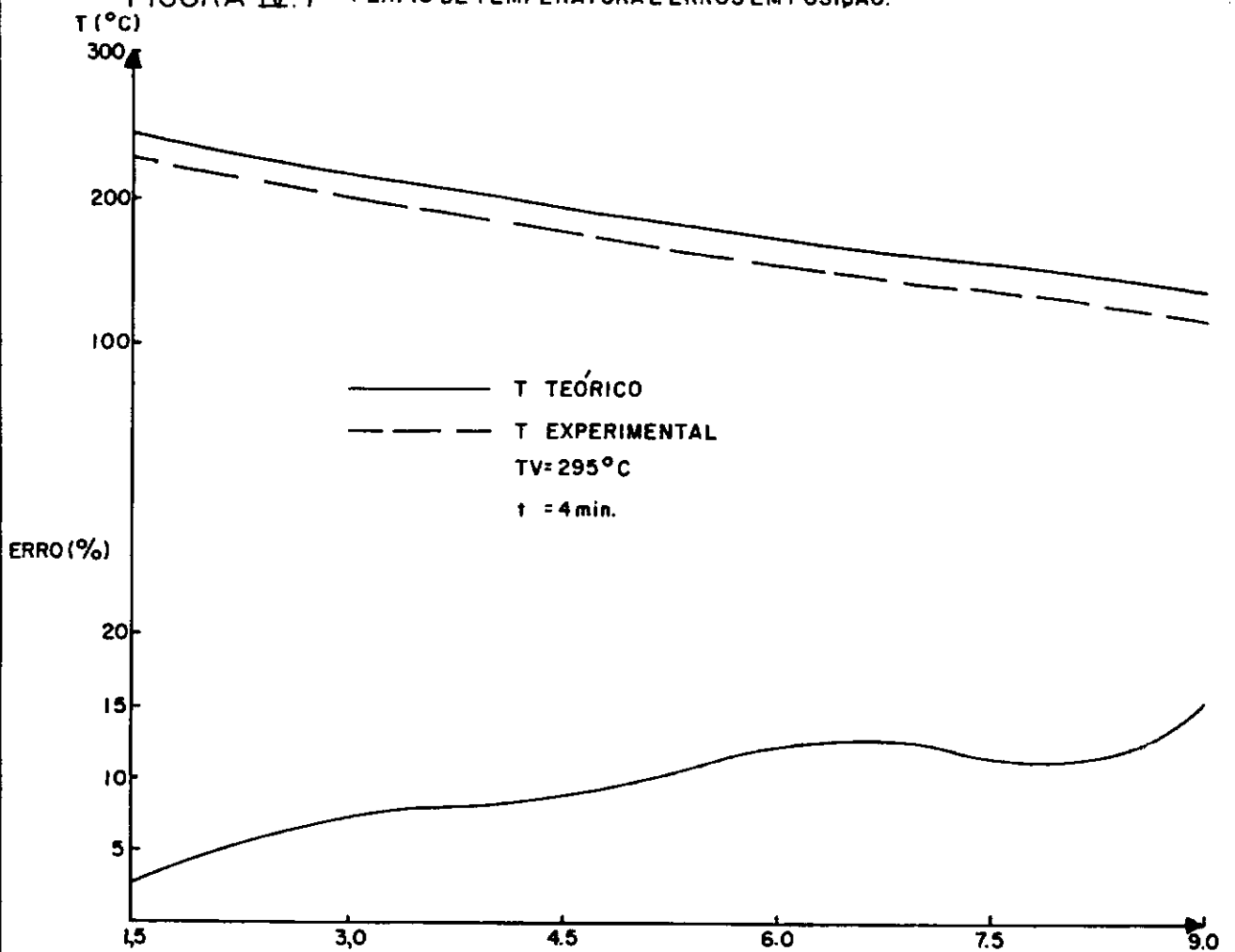
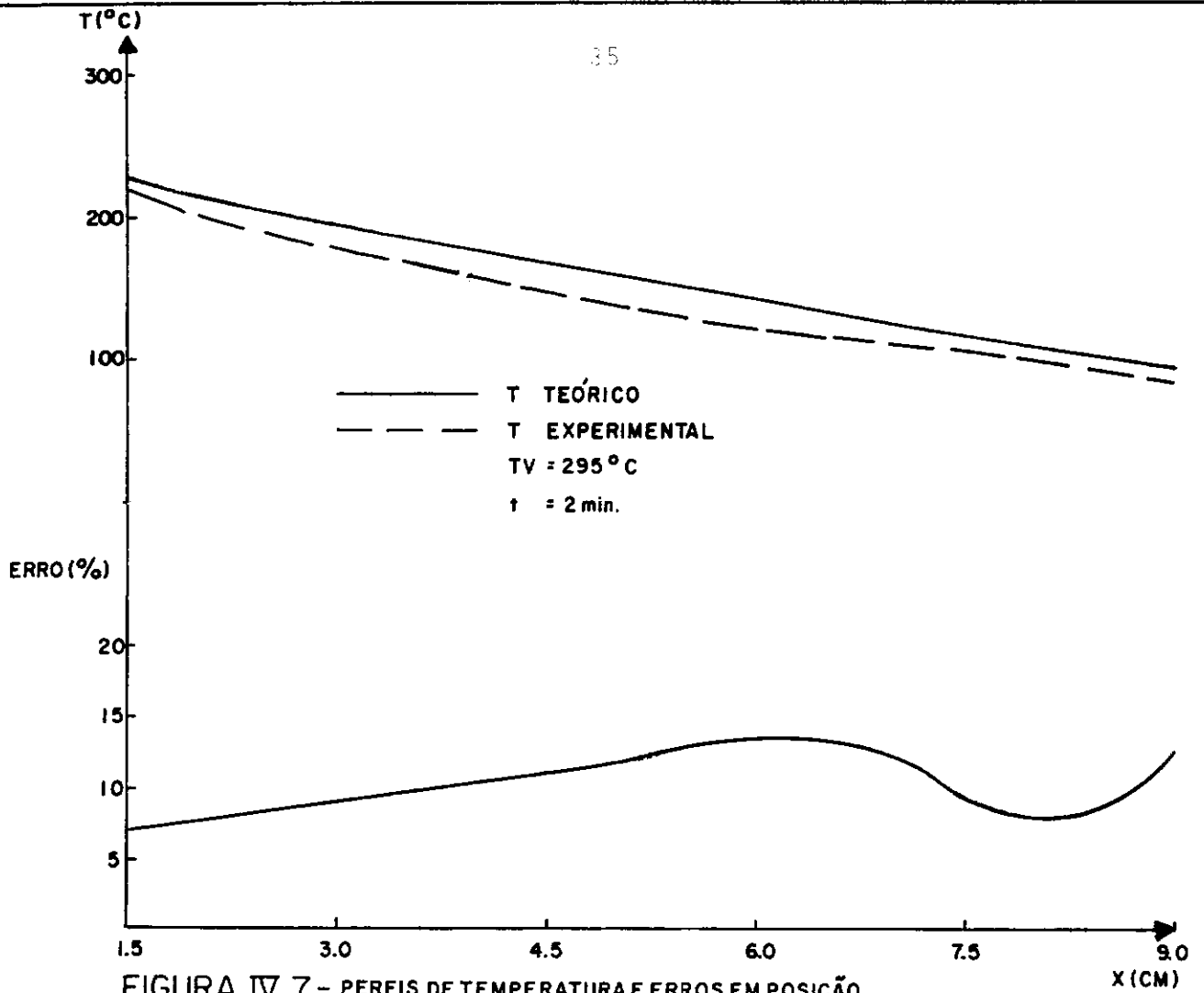


FIGURA IV.7 - PERFIS DE TEMPERATURA E ERROS EM POSIÇÃO

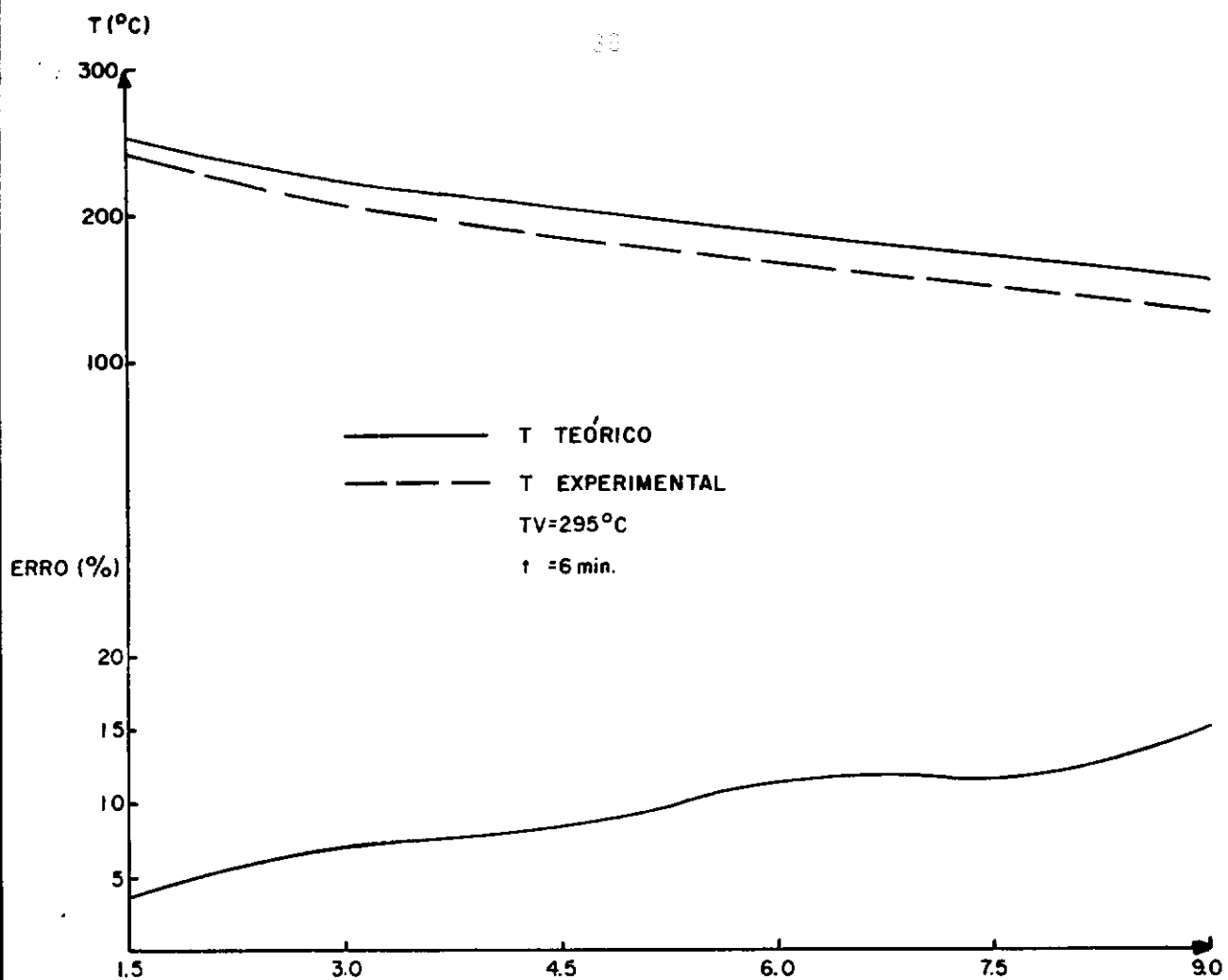


FIGURA IV.8 - PERFIS DE TEMPERATURA E ERROS EM POSIÇÃO.

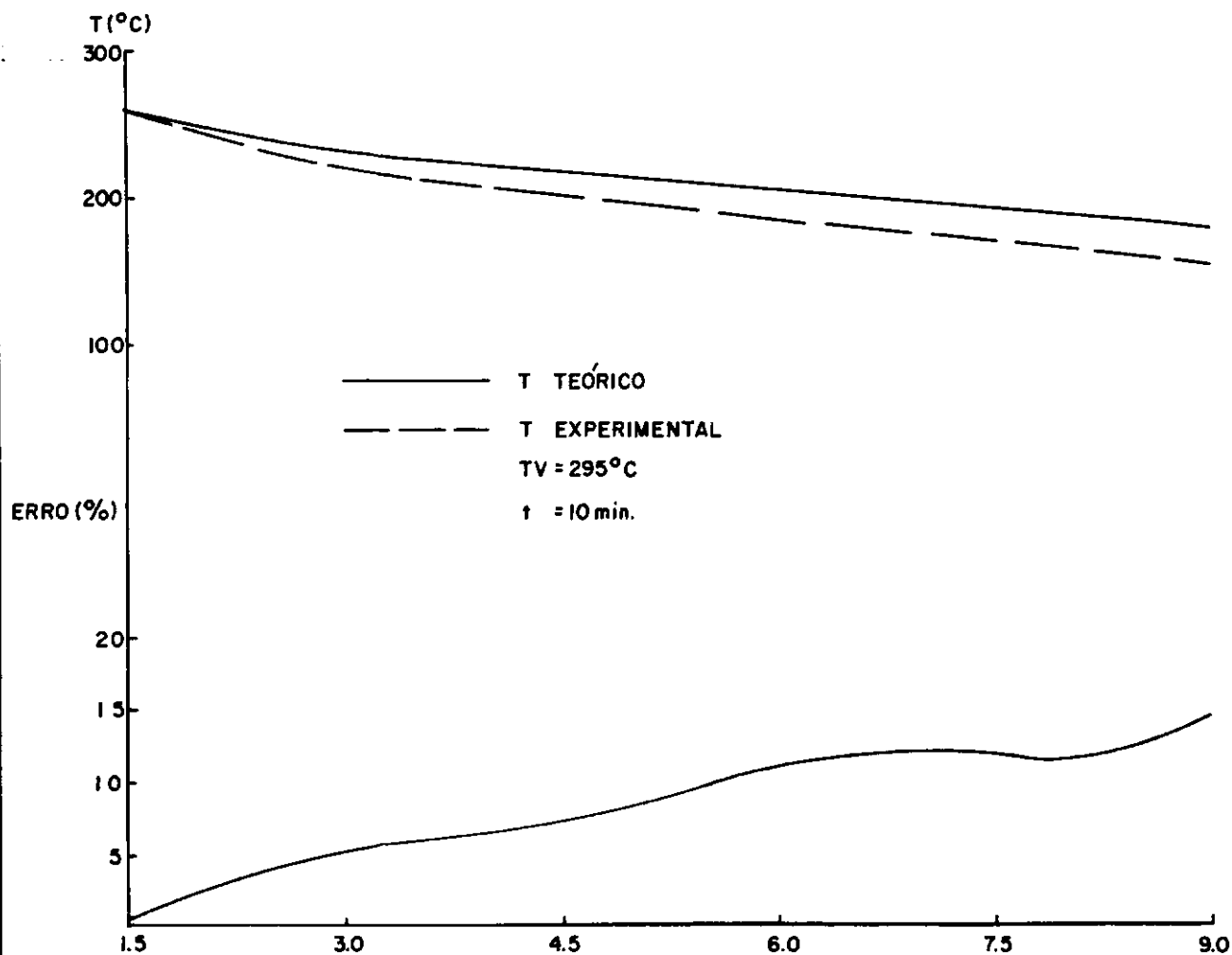


FIGURA IV.8 - PERFIS DE TEMPERATURA E ERROS EM POSIÇÃO.

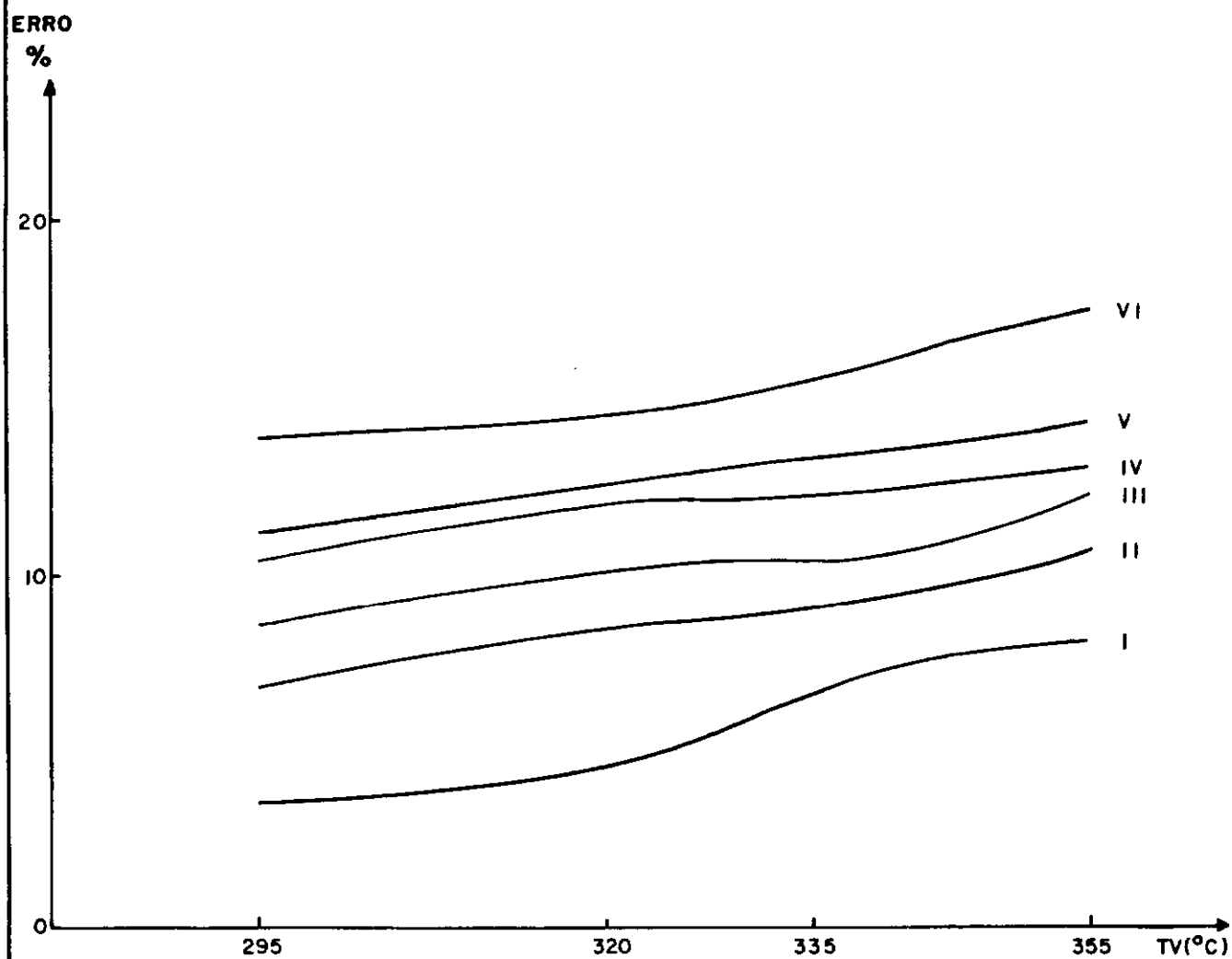


FIGURA IV.8.1 - ERROS PERCENTUAIS MÉDIOS DE TEMPERATURA

tão sujeitos a maiores perdas de calor, devido à maior área lateral exposta.

Estes gráficos enfatizam ainda que para um mesmo ponto, esses erros são crescentes com a elevação de temperatura. A razão é óbvia, uma vez que a elevação de temperatura do sistema implica num maior gradiente entre o sistema e o meio exterior, provocando maior fuga de calor e consequentemente afastando os resultados experimentais daqueles esperados pelo modelo.

IV.3 Análise de λ

O parâmetro λ , responsável pela cinemática da frente de fusão é acarretado pelos mesmos erros decorrentes do posicionamento da frente de fusão (10,5% a 21,5%), evidentemente, porque resulta da aplicação da mesma fórmula teórica (equação II-11).

Ainda da tabela I e tabelas semelhantes para outras temperaturas, nos foi possível construir o gráfico (fig. IV.9) que expressa as dependências λ contra ΔT e $\bar{\lambda}$ contra ΔT , onde $\Delta T = T_v - T_f$.

Especificamente, para o caso da tabela em

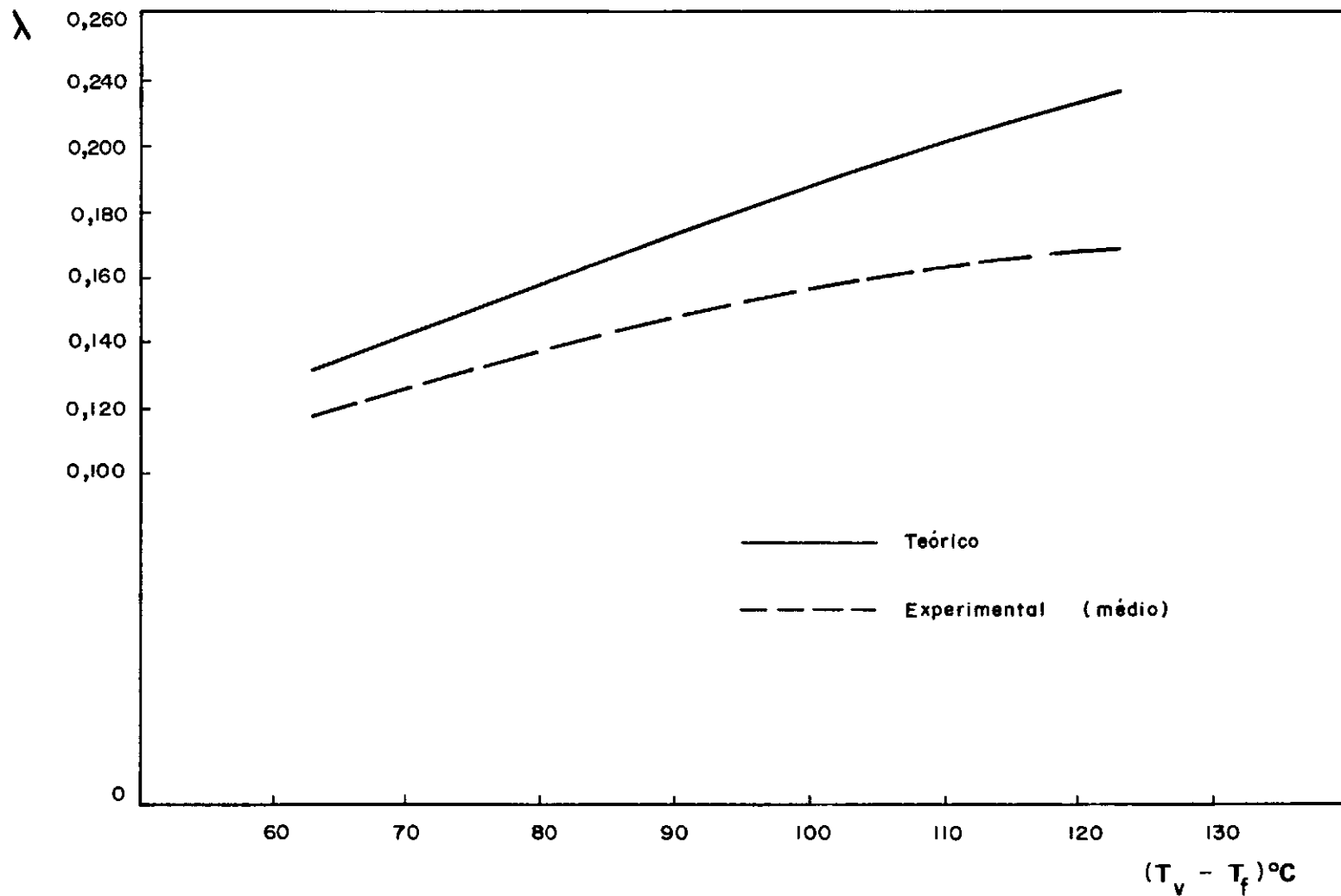


Figura IV. - 9 — Confronto teórico-experimental do parâmetro cinemático da fusão

questão, temos $T_v = 320^\circ\text{C}$ e daí $\lambda = 0,170$, de acordo com a equação (II-12). Por outro lado, $\bar{\lambda} = 0,147$. Então, para $\Delta T = 320 - 232$, ou seja $\Delta T = 88^\circ\text{C}$, temos os valores de λ e $\bar{\lambda}$ conforme mostra o gráfico. Observamos que o desvio teórico-experimental de λ , vai se acentuando a medida que ΔT cresce, isto é, a medida que se eleva a temperatura da fonte. Claro está que com o acréscimo de temperatura da fonte a análise feita em IV.2 também se aplica aqui, acarretando portanto maiores fugas de calor e conseqüentemente afastando o valor experimental de λ do seu valor teórico.

IV.4 Eficiência

Dispondo dos valores de λ e $\bar{\lambda}$ conforme ficou visto em IV.3, estabelece-se os respectivos valores de η e $\bar{\eta}$ utilizando-se a equação (II-14), uma vez que se conhece a temperatura da fonte, T_v , para determinada experiência. Da mesma forma que foi feito para λ , podemos representar graficamente η e $\bar{\eta}$ em função de ΔT obtendo a figura IV.10.

Para o exemplo particular da fonte mantida a 320°C , de acordo com a tabela I obtivemos os valores de $\eta = 18,2\%$ (teórico) e $\bar{\eta} = 16,5\%$ (experimental médio). Repetindo este cálculo para as demais experiências foi construído o gráfico (fig. IV.10).

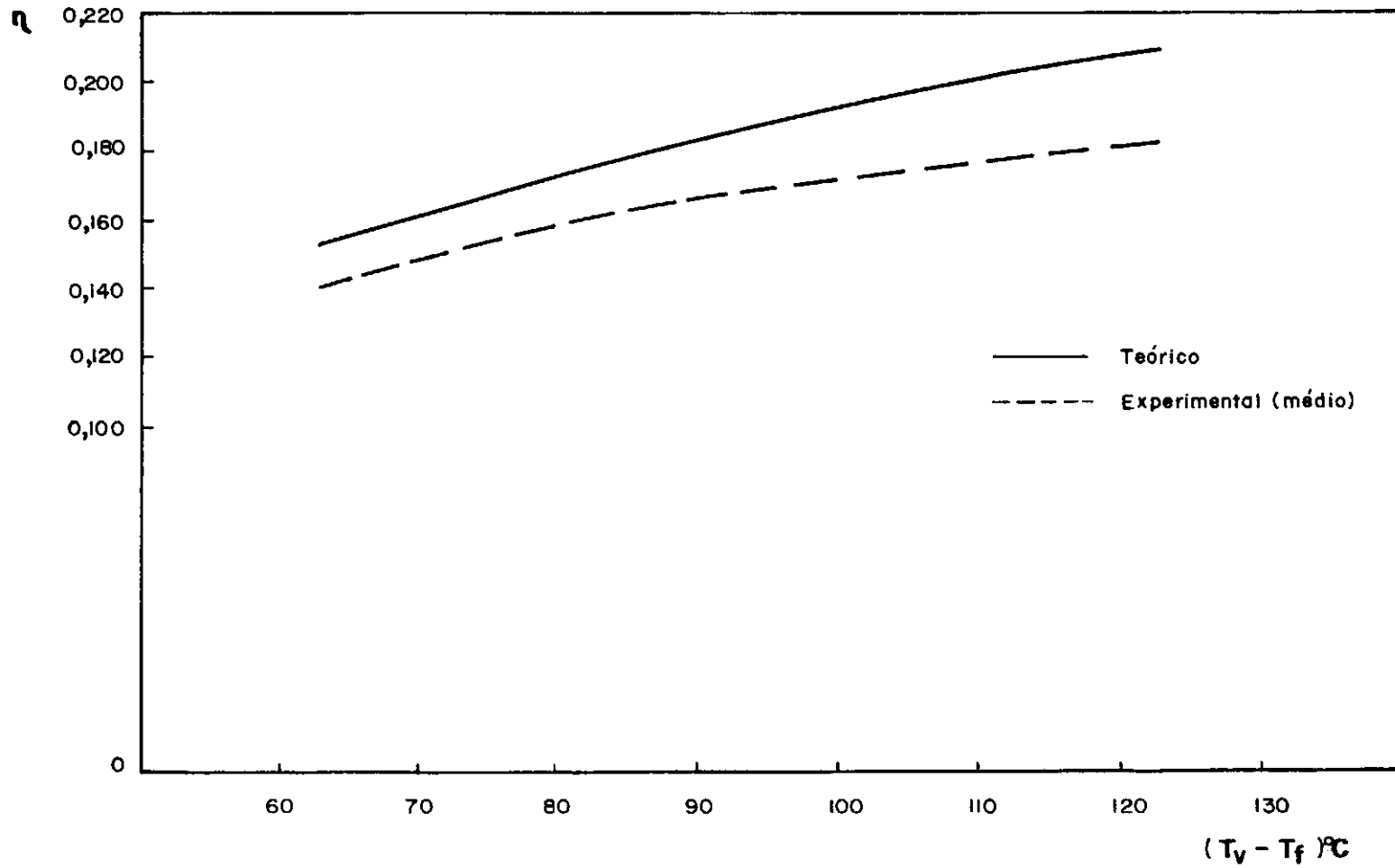


Figura IV. -10 — Confronto teórico-experimental da eficiência do armazenamento térmico

Ainda aqui, acréscimos em ΔT implicam em maiores erros sobre η . A análise de IV.2 também se aplica na análise de eficiência.

Analizando-se este gráfico, constatamos que o erro relativo de eficiência experimental, frente ao teórico, está compreendido entre 6% e 13%. No caso do exemplo acima o erro foi de 9%.

De acordo com o visto em II-6, para o estanho com $T_0 = 20^\circ\text{C}$, a eficiência máxima é 27%. Convém salientar ainda, que, teoricamente, a fonte deveria alcançar temperaturas da ordem de 657°C para termos essa eficiência. Trabalhamos numa faixa de temperatura muito mais cômoda ($295 \leq T_v \leq 355$) e chegamos a obter 75% dessa eficiência máxima, não nos expondo aos transtornos decorrentes de se trabalhar em temperaturas elevadas.

CAPÍTULO V

CONCLUSÕES

Um exame crítico dos resultados experimentais ressaltados os erros decorrentes de perdas térmicas, e do modelo matemático teórico, onde não foram considerados os efeitos de convecção e radiação, nos leva a concluir que:

1) o modelo matemático de Neumann³ sofre restrições quando se trabalha em temperaturas elevadas ($\Delta T > 120^\circ\text{C}$). Essa restrição diz respeito mais diretamente no tocante a frente de fusão. Também os tempos longos influem no sentido do acúmulo desses erros, para as condições experimentais utilizadas. Em primeira análise depreende-se que, ambos, temperaturas elevadas e tempos longos, contribuem para maiores fugas de calor.

2) Por outro lado, uma análise à luz da eficiência, traz resultados amplamente positivos. Com efeito, trabalhando com $\Delta T = 120^\circ\text{C}$, isto é, $T_v = 350^\circ\text{C}$, onde as equações de Neumann respondem satisfatoriamente, a eficiência é de 21%. Para se trabalhar na faixa de eficiência máxima, 27%, isto é, ganhar apenas 6%, seríamos obrigados a elevar a fonte a temperaturas da ordem de 657°C isto é, quase o dobro daquela correspondente aos 21% de eficiência, o que não apresenta nenhuma van

tagem no ponto de vista operacional e econômico.

Convém salientar ainda que outros erros secundários contribuem afastando a realidade do ideal, quais sejam, a variação dos parâmetros físicos do metal com a temperatura, as dificuldades que surgem no início da operação, os erros inerentes aos termopares, etc..

Então, baseado na discussão anterior, concluímos que o modelo de Neumann verifica-se na prática para temperaturas limitadas (fonte até 350 °C) e tempos rápidos ($0 \leq t \leq 10$ minutos) com erro máximo de posição de 21,5% e eficiência teórica de 21% (75% da eficiência máxima).

Acréscimos de temperatura da fonte não trazem, no ponto de vista prático, melhoria apreciável de eficiência do processo.

CAPÍTULO VI

SUGESTÕES

1 - Seria de bom alvitre que estudos complementares fossem desenvolvidos no sentido de estabelecer o ponto ótimo que atenda a dependência "eficiência-posicionamento da frente de fusão", sob o ponto de vista operacional e econômico.

2 - Recomendaríamos também que outros materiais fossem testados experimentalmente, em particular ligas a base de estanho com ponto de fusão abaixo do ponto de fusão do metal puro.

É evidente que materiais com alto calor latente de fusão são recomendáveis.

3 - No ponto de vista experimental, se o sistema estivesse envolto por um equipamento no interior do qual fosse feito um vácuo, as perdas térmicas por convecção diminuiriam, o que possivelmente melhoraria a performance do sistema.

4 - Sugeriríamos ainda que o experimental fosse executado em temperatura ambiente, ou seja, no entorno de 30 °C, não somente atendendo a análise de II-6, no tocante a eficiência, como também diminuindo gradiente de temperatura entre o

sistema e o meio externo, atenuando as perdas térmicas.

5 - Finalmente, nos parece importante uma sugestão de caráter teórico para a análise do comportamento de materiais que apresentam acentuada variação de volume na mudança de estado. Recomendaríamos, neste caso a utilização das fórmulas apresentadas por Carslaw e Jaeger⁴.

APÊNDICE A

SOLUÇÃO DO MODELO TEÓRICO

FUSÃO NA REGIÃO $x > 0$

SÓLIDO SEMI-INFINITO

De acordo com a Figura II.1, temos:

$x < 0$	fonte
$x = 0$	contacto fonte-metal
$0 \leq x \leq X(t)$	metal líquido
$x = X(t)$	interface sólido-líquido
$X(t) \leq x < \infty$	metal sólido

Condições de Contorno:

$$x = 0 \quad T_2 = T_v \quad t \geq 0 \quad (\text{A-I})$$

$$x = \infty \quad T_1 = T_o \quad \forall t \quad (\text{A-II})$$

$$x = X(t) \quad T_1 = T_2 = T_f \quad t \geq 0 \quad (\text{A-III})$$

$$x = X(t) \quad q_2 - q_1 = L \rho \frac{dX(t)}{dt} \quad (\text{A-IV})$$

Equações de distribuição de temperaturas nas duas fases:

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial T_1}{\partial t} \quad (\text{A-V})$$

$$\frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial T_2}{\partial t} \quad (\text{A-VI})$$

Com a transformação $\epsilon = \frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}$, as equações (A-V) e (A-VI) se tornam:

$$\frac{d^2 T}{d\epsilon^2} + 2\epsilon \frac{dT}{d\epsilon} = 0, \quad (\text{A-VII})$$

cujas soluções são do tipo $T = A + B \operatorname{erfc}(\epsilon)$ (A-VIII)

Solução para a fase líquida da equação (A-VII)

$$\begin{aligned} x = 0 & \quad \epsilon = 0 & \quad T = T_v \\ 0 \leq x \leq X(t) & \quad \epsilon = \frac{x}{2\sqrt{\alpha_2 t}} & \quad T = T_2 \end{aligned}$$

$$T_2 = T_v + B_2 \operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{\alpha_2 t}} \quad (\text{A-IX})$$

Solução para a fase sólida da equação (A-VII)

$$\begin{aligned} x > X(t) & \quad \epsilon = \frac{x}{2\sqrt{\alpha_1 t}} & \quad T = T_1 \\ x = \infty & \quad \epsilon = \infty & \quad T = T_o \end{aligned}$$

$$T_1 = T_o + B_1 \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{\alpha_1 t}} \quad (\text{A-X})$$

Posição da frente de fusão e determinação das constantes B_1 e B_2

A condição (A-III) se escreve

$$T_o + B_1 \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{\alpha_1 t}} \bigg|_{x=X(t)} = T_v + B_2 \operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{\alpha_2 t}} \bigg|_{x=X(t)} = T_f \quad (\text{A-XI})$$

$$\operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{\alpha_2 t}} \bigg|_{x=X(t)} = (C^{te})$$

$$X(t) = 2 \lambda \sqrt{\alpha_2 t} \quad (\text{A-XII})$$

Ainda da equação (A-XI):

$$B_1 = \frac{T_f - T_o}{\operatorname{erfc} \left[\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \lambda \right]}$$

$$B_2 = - \frac{T_v - T_f}{\operatorname{erfc} \lambda}$$

Com estes valores, as equações (A-XI) e (A-X) se tornam

$$T_2 = T_v - \frac{T_v - T_f}{\operatorname{erfc} \lambda} \operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{\alpha_2 t}} \quad (\text{A-XIII})$$

$$T_1 = T_o + \frac{T_f - T_o}{\operatorname{erfc} \left[\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \lambda \right]} \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{\alpha_1 t}} \quad (\text{A-XIV})$$

As equações (A-XIII) e (A-XIV) dão os perfis de temperatura nas duas fases, a menos da constante λ que será de-

terminada a seguir.

Pela condição (A-IV) e a equação de posição (A-XII), temos, respectivamente,

$$k_1(B_1 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2\sqrt{\alpha_1 t}} e^{-\frac{x^2}{4\alpha_1 t}} \Big|_{x=X(t)} - k_2(B_2 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2\sqrt{\alpha_2 t}} e^{-\frac{x^2}{4\alpha_2 t}} \Big|_{x=X(t)} - L \rho \frac{dX(t)}{dt}$$

$$\frac{dX(t)}{dt} = \lambda \sqrt{\frac{\alpha_2}{t}}$$

As duas equações acima convenientemente manipuladas determinam λ

$$\frac{e^{-\lambda^2}}{\operatorname{erf} \lambda} - \frac{k_1}{k_2} \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \frac{T_f - T_o}{T_v - T_f} \frac{e^{-\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \lambda^2}}{\operatorname{erfc} \left[\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \lambda \right]} = \frac{L \sqrt{\pi}}{C_2 (T_v - T_f)} \lambda \quad (\text{A-XV})$$

A equação transcendental (A-XV) fornece um único valor de λ e completa a solução do problema, pois assim ficam definidas as equações (A-XII), (A-XIII) e (A-XIV). Observemos que λ é uma função das propriedades físicas do material utilizado e das condições térmicas impostas.

NOMENCLATURA

T_0	Temperatura inicial
T_f	Temperatura de fusão
T_v	Temperatura da fonte
T_1	Temperatura da fase sólida
T_2	Temperatura da fase líquida
$X(t)$	Posição da frente de fusão
k	Coeficiente de condutividade térmica
c	Calor específico
ρ	Massa específica
α	Difusividade térmica
L	Calor latente de fusão
η	Eficiência
λ	Parâmetro cinemático
erf	Função erro
erfc	Função erro complementar

BIBLIOGRAFIA

- 1 - FOURIER, J.B. - Theorie Analytique de la Chaleur, Paris
1822.
- 2 - STEFAN, - Ann. Phys. Chem. (Wiedmann) N.F., 42, 35, 1891.
- 3 - NEUMANN, F. - Die Partiellen Differentialgleichungen der
Mathematischen Physik (edn 5, 1912) Vol. 2, p.121.
- 4 - CARSLAW, H.S. and JAEGER, J.C., - Conduction of Heat in
Solids, 2nd ed., Oxford University Press, 1959,
Chapter XI.
- 5 - CHUANG, Y.K. and SZEKELY, J. - "On the Use of Green's
Functions for Solving Melting of Solidification
Problems", Int. J. Heat and Mass Transfer, Vol.14
pp.1285-1294. Pergamon Press 1971.
- 6 - SPRINGER, G.S. - "The Effects of Axial Heat Conduction
on the Freezing or Melting of Cylinders", Int.
J. Heat and Mass Transfer, 12, 4, 1969.
- 7 - CHO, S.H. and SUNDERLAND, J.E. - Heat Conduction Problems
with Melting or Freezing. J. Heat Transfer 91
421-426, 1969.
- 8 - LIUBOV, B. Ya., - "The Computation of the Velocity of the
Solidification of Mettalic Ingots", Doklady
Akademiia Nauk, Novair Series, Vol. 68, 1949,
p.847.
- 9 - PRASAD, A. and AGRAWAL, H.C. - "Biot's Variational
Principle for a Stefan Problem", AIAA Journal,
10, 3, 1972.

- 10 - GOODMAN, T.R. - Application of Integral Methods to Transient Non Linear Heat Transfer, Advances in Heat Transfer, edited by Irvine, T.F., and Hartnett, J.P., Vol. I, p.52, Academic Press, New York 1964.
- 11 - FRIEDMAN, A. - Partial Differential Equations of Parabolic Type. Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 215, 1964.
- 12 - POGORZELSKI W. - L'Etude de la Solution Fondamental de l'Equation Parabolique, Ricerche di Mat, 5, 25-27, 1965.
- 13 - TIKHONOV, A.N. and SAMARKSII, A.A., Equations of Mathematical Physics, p.521. Macmillan, New York, 1963.
- 14 - HACKENBERG, C.M. e MILITO, F.A. - "Condução de Calor em Sólidos e o Problema da Mudança de Estado". Revista Brasileira de Tecnologia, Vol. 7, nº 3, setembro de 1976, pag. 245.
- 15 - LYMAN, T., - Metals Handbook, The American Society for Metals, Novelty-Ohio, 1968.